

Weiterentwicklung der Bemessungsmethoden für Verkehrsflächen – Teil Betonstraßen, Komplex 3: mathematisch-statistische Überlagerung der Verteilung der Dicke und Spaltzugfestigkeit

FA 4.194

Forschungsstelle: Villaret Ingenieurgesellschaft mbH, Hönow

Bearbeiter: Riwe, A. / Villaret, S.

Auftraggeber: Bundesministerium für Verkehr, Bau- und Wohnungswesen, Bonn

Abschluss: März 2007

Für die Spaltzugfestigkeit werden die bisher verwendeten Streuungswerte anhand neuerer Stichproben aus Bohrkernen von Autobahnen überprüft.

Weiter werden die Grundlagen einer möglichen Implementierung des Überlagerungsverfahrens in das vorhandene Dimensionierungsprogramm beschrieben.

1 Aufgabenstellung

Bei einer Dimensionierung werden ganz allgemein einwirkende Größen mit widerstehenden Größen gegenübergestellt. Beide Größen sind in der Praxis nicht konstant, sondern streuen um einen bestimmten Wert. Dadurch entsteht in der Dimensionierung eine Unsicherheit, welche in der Vergangenheit durch die Einführung eines Sicherheitsfaktors abgedeckt wurde. Weil aber die Streuweiten prinzipiell nicht begrenzt (bzw. erst vom Wert 0 begrenzt) sind, verbleibt immer eine Restunsicherheit.

Weit streuende Werte sind nicht unmöglich, sondern nur unwahrscheinlich. Somit verbleibt auch eine gewisse Wahrscheinlichkeit für das Versagen des Bauteils.

Die genannten Zusammenhänge gelten für jegliche Dimensionierung im Bauwesen.

Im allgemeinen Hochbau, sowie im Ingenieurbau ist es normalerweise notwendig, die Ausfallraten soweit zu senken, dass diese praktisch Null sind (DIN, 1981). Im Straßenbau dagegen sind höhere, jedoch begrenzte Ausfallraten hinnehmbar und wirtschaftlich sinnvoll.

Bei der Dimensionierung sind Baukosten und zu erwartender Erhaltungsaufwand gegeneinander abzuwägen. Diese Optimierungsaufgabe ist nur lösbar, wenn die Ausfallrate im Zuge der rechnerischen Dimensionierung berechnet werden kann. Eine möglichst genaue Ermittlung der Ausfallrate ist somit von entscheidender Bedeutung für eine wirtschaftliche Dimensionierung des Oberbaus.

Für die rechnerische Dimensionierung von Befestigungen mit unbewehrten Betondecken im Verkehrsbau wurde 2002 ein Forschungsvorhaben (Pfeifer, 2002) abgeschlossen, das mit dem praxisreifen DV-Programm AWDSTAKO auf Grundlage eines fachtechnischen Handbuchs abschloss.

Im System AWDSTAKO wird die zulässige Betonspannung als Quantilwert der vorhandenen Spaltzugfestigkeit definiert. Das Quantil wird als Ausfallrate interpretiert.

Die Streuung der anderen Einflussgrößen wird über Teilsicherheitsfaktoren erfasst. Eine exakte Ermittlung der Ausfallrate erfordert aber die Berücksichtigung aller Einflussfaktoren als Zufallsgrößen.

Mit diesem Komplex des Forschungsvorhabens erfolgt der erste Schritt zur mathematischen Formulierung der Überlagerung der Streuungsfunktionen verschiedener Einflussgrößen.

Die praktisch auftretenden Streuungsparameter werden für die Deckendicke, als neben der Spaltzugfestigkeit wichtigstem Einflussfaktor, untersucht. Es wird gezeigt, welchen Einfluss die Streuung dieser Größe auf die Ausfallrate hat.

2 Untersuchungsmethodik

Für das Problem der Überlagerung der Streuungsfunktionen (mathematisch Verteilungs-, bzw. Dichtefunktionen) wurden verschiedene Ansätze untersucht. Dabei wurden die klassischen Methoden der Zuverlässigkeitstheorie auf das vorliegende Bemessungsproblem angewendet (Spaethe, 1992). Es wurde Wert darauf gelegt, ein Verfahren zu finden, welches die Einbeziehung weiterer Zufallsgrößen ermöglicht.

Es wurden 4 grundsätzliche Lösungsansätze untersucht:

- Anwendung des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes,
- Definition einer Verteilungsfunktion für das aufnehmbare Moment,
- Integration der Zufallsgrößen über den Ausfallbereich und
- Anwendung des FORM-Algorithmus.

Für die Auswahl einer Vorzugslösung wurden folgende Kriterien herangezogen:

- Erweiterbarkeit,
- Exaktheit,
- Einfachheit in der Anwendung sowie
- programmtechnische Umsetzbarkeit.

Die Ermittlung praktisch auftretender Streuungsparameter erfolgte durch die statistische Auswertung vorliegender Messergebnisse. Dabei wurden die entsprechenden Methoden der mathematischen Statistik angewendet (Stange, 1970; Storm, 1976).

Für die Streuung der Dicke und Spaltzugfestigkeit wurde jeweils eine Normalverteilung unterstellt (Brameshuber u. a., 2003).

Diese Hypothese wurde mit einem geeigneten Testverfahren (Kolmogorow-Lilliefors-Test) für jede Stichprobe überprüft.

Normalverteilungen sind durch die beiden Parameter Standardabweichung (σ) und Erwartungswert (μ) vollständig bestimmt. Zur Abschätzung dieser Parameter wurde für jede Stichprobe ein Wertebereich (Konfidenzintervall) berechnet, in welchem der tatsächliche Parameter mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt. Die relative Länge des Intervalls (absolute Intervalllänge in Relation zum absoluten Parameterwert) gibt Auskunft über die Genauigkeit der Schätzung. Der Begriff "Schätzung" ist jeweils im mathematisch-statistischen Sinne zu verstehen.

So ermittelte Parameterwerte wurden für eine Beispielrechnung zugrunde gelegt, um den Einfluss der Streuung der Deckendicke auf die Ausfallrate zu untersuchen.

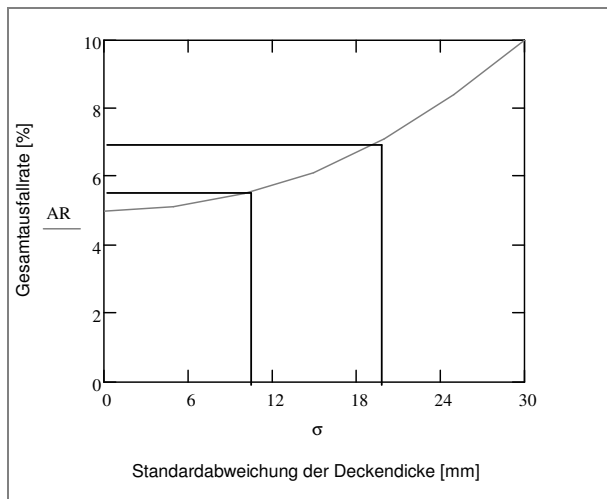


Bild 1: Zusammenhang zwischen Streuungsmaß (Standardabweichung σ) der Einbaudicke und Ausfallrate (AR)

Es zeigt sich, dass die Gesamtausfallrate mit wachsender Streuung der Einbaudicke ansteigt. Im praxisrelevanten Bereich einer Dickenstreuung mit s zwischen 10 und 20 mm, ergibt sich eine Steigerung der Ausfallrate um ca. 10 % bis 40 % (Bild 1). Dies wird in der gegenwärtigen Programmversion von AWDSTAKO durch einen impliziten Teilsicherheitsbeiwert berücksichtigt.

Dieses Ergebnis entspricht den Erwartungen, weil zu den Ausfallbereichen infolge mangelnder Betonfestigkeit die Ausfallbereiche infolge geringer Einbaudicke hinzukommen. Dies wird teilweise dadurch kompensiert, dass eine Minderfestigkeit des Betons durch eine gleichzeitig vorhandene Mehrdicke ausgeglichen werden kann. Beide Effekte sind im Ergebnis berücksichtigt.

Damit wird deutlich, dass die Berücksichtigung der Streuung der Deckendicke sinnvoll ist.

3 Untersuchungsergebnisse

Bei der Analyse der unterschiedlichen Lösungsansätze für die mathematischen Überlagerungen der Verteilungsfunktionen zeigte sich, dass die Anwendung des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes keine brauchbaren Resultate liefert.

Die exakte Ermittlung einer Verteilungsfunktion für das aufnehmbare Moment war zwar möglich, erbrachte aber ebenso wie die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes nur unzureichende Ergebnisse.

Die dabei gefundene Formel ist relativ kompliziert. Der Einfluss der Streuung der Deckendicke wird aber nur partiell berücksichtigt, weil in der Bemessungsformel nicht nur das aufnehmbare Moment, sondern auch die elastische Länge l_v , von der Deckendicke abhängig ist.

Die anfängliche Vermutung, dass dieser Einfluss von untergeordneter Bedeutung sei, konnte durch systematische Vergleichsrechnungen nicht bestätigt werden.

Die Methode der Integration der Zufallsgrößen über den Ausfallbereich erwies sich als geeignetes Verfahren zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit. Das Verfahren lässt sich durch die folgende Überlegung veranschaulichen:

Betrachtet man Betonfestigkeit und Einbaudicke als Zufallsgrößen, so kann man jeder bestimmten Betonfestigkeit f_i und jeder

bestimmten Einbaudicke h_i eine Wahrscheinlichkeit $p(f_i)$ und $p(h_i)$ zuordnen. Gegenseitige Unabhängigkeit kann dabei vorausgesetzt werden. Das gleichzeitige Auftreten dieser Werte hat dann die Wahrscheinlichkeit

$$p(f_i, h_i) = p(f_i) \cdot p(h_i).$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit für das Bauteil Betondecke errechnet sich dann als Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten $p(f_i, h_i)$, welche zum Versagen führen.

Für kontinuierliche Verteilungsfunktionen ergibt sich somit für die Versagenswahrscheinlichkeit des Bauteils:

$$P = \int_0^{\infty} \int_0^{gf} p_{\text{Beton}}(y) \cdot p_h(z) dy dz$$

Die Funktionen p_{Beton} und p_h stellen die Wahrscheinlichkeitsverteilung (Dichtefunktion) der Spaltzugfestigkeit und der Einbaudicke des Betons dar. Die Ausfallwahrscheinlichkeit ergibt sich aus dem Doppelintegral (Faltungsintegral) welches durch die Grenzfunktion abgetrennt wird (Bild 2).

Die Grenzfunktion gf ist die den Versagensbereich begrenzende Funktion, im konkreten Fall die Dimensionierungsformel. Man errechnet also die Wahrscheinlichkeit, dass die Differenz zwischen den aufnehmbaren und einwirkenden Beanspruchungen kleiner als Null wird. Die aufnehmbare Beanspruchung wird durch die Spaltzugfestigkeit des Straßenbetons und die einwirkende Beanspruchung wird durch die vorhandene Betonzugspannung in der Randfaser unter der jeweiligen Belastungssituation repräsentiert.

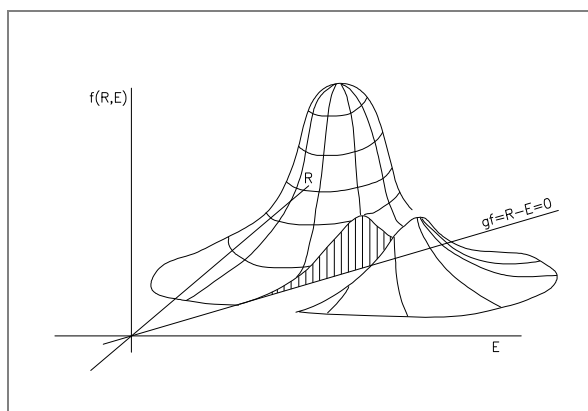


Bild 2: Das Volumen des abgeschnittenen Teils des Faltungsintegrals entspricht der Ausfallwahrscheinlichkeit

Die Lösung ist mathematisch exakt und für die beiden betrachteten Zufallsgrößen vollständig.

Für die Gültigkeit des Verfahrens spielt es keine Rolle, wie oft und in welcher Form die Zufallsgrößen in der Bemessungsformel vorkommen. Etwaige Modifikationen der Bemessungsformel wären also unproblematisch.

Ebenso ist das Verfahren nicht an die Normalverteilung gebunden. Die Verwendung anderer Verteilungsfunktionen ist problemlos möglich und beeinträchtigt nicht die Effizienz.

Die Auswertung des Integrals kann aber nur auf numerischem Wege erfolgen. Hierfür stehen geeignete Verfahren (z. B. Trapezverfahren, Simpsonsche Regel, Rechteckverfahren u. a.) zur Verfügung.

Die Berücksichtigung weiterer Zufallsgrößen kann analog erfolgen. Für n -Zufallsgrößen ist ein n -dimensionales Integral aus-

zuwerten. Die Rechenzeit steigt damit allerdings exponentiell an.

Wie Testrechenläufe zeigen, sind die Rechenzeiten für 2 Zufallsgrößen unproblematisch. Für eine größere Anzahl (ca. 4 oder 5) stößt das Verfahren an rechentechnische Grenzen.

In diesem Fall kann der FORM-Algorithmus (FORM – First Order Reliability Method) Anwendung finden (Spaethe, 1992). Bei diesem Verfahren werden die Verteilungsfunktionen, soweit erforderlich, durch eine Normalverteilung approximiert. Die Normalverteilungen werden normiert. Die Grenzfunktion wird mithilfe einer Taylorentwicklung (Abbruch nach dem Linearglied) linearisiert. Man gewinnt eine Linearkombination von Normalverteilungen für welche die Verteilungsparameter leicht zu berechnen sind.

Der Vorteil des FORM-Algorithmus liegt gegenüber der Integrationsmethode allein in der geringeren Rechenzeit.

Soweit die Rechenzeit beherrschbar bleibt, ist das Integrationsverfahren daher zu bevorzugen.

Für die praktische Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit mit den beschriebenen Verfahren, ist die Kenntnis der Verteilungsfunktionen der Einflussgrößen erforderlich.

Es wurde festgestellt, dass für die Dicke wie auch für die Spaltzugfestigkeit eine Normalverteilung angesetzt werden kann.

Die Schätzung der Verteilungsparameter ist auf Basis einer Stichprobe möglich. Dabei zeigt sich der erwartete Zusammenhang, dass sich die Genauigkeit der Schätzung mit steigendem Stichprobenumfang verbessert. Für eine akzeptable Schätzung muss die Stichprobe mindestens 15 Einzelwerte umfassen.

4 Folgerungen für die Praxis

Zusammenfassend sind folgende Aussagen zu treffen:

- Die Berücksichtigung der Streuung der Einflussgrößen bei der Bemessung ist möglich und sinnvoll. Die Berechnung der Ausfallrate erfolgt dadurch mit größerer Genauigkeit. Damit wird eine wirtschaftlichere Dimensionierung möglich.
- Niedrige Streuungswerte führen zu kleineren Ausfallraten. Damit ermöglicht eine hohe Fertigungsqualität (geringe Streuung) eine wirtschaftlichere Dimensionierung des Oberbaus.
- Die Parameter der betreffenden Verteilungsfunktionen können durch die Auswertung entsprechender Stichproben gewonnen werden.
- Eine Implementierung des probabilistischen (auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen beruhenden) Dimensionierungsverfahrens in das Programm AWDSTAKO ist bei Durchführung der erforderlichen Vergleichs-, Kalibrierungs- und Anpassungsarbeiten möglich.
- Die Erweiterung auf weitere Zufallsgrößen ist anzustreben.

Literatur

AWDSTAKO: Das Dimensionierungsprogramm AWDSTAKO für Betondecken von Straßenverkehrsflächen ist ein Verfahren nach Pfeifer.

Brameshuber, W.; Brockmann, T. (2003): Ringversuch zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls des Betons, in: Beton, 53 (2003), Heft 6, S. 294-298.

Deutsches Institut für Normung (DIN) e.V. (1981): Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen, Berlin u. a.

Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen (FGSV) (2003): Merkblatt für die statistische Auswertung von Prüfergebnissen, Teil 2: Erkennen und Behandeln von Ausreißern, Köln.

Pfeifer, L. (2002): Dimensionierungsverfahren für Betonoberbau, FA 8.160, Schlussbericht.

Pfeifer, L. (2003): Rechnergestützte Dimensionierung von Betondecken für Verkehrsflächen nach Grenzzuständen, in: Straße und Autobahn, 58 (2003), Heft 12, S. 673-684.

Spaethe, G. (1992): Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen, Berlin u. a.

Stange, K. (1970/1971): Angewandte Statistik. Teile 1 und 2, Berlin u. a.

Strom, R. (1976): Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle, 6. Aufl., Leipzig.